



**MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA**
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lubica Jančová

Alexanderův polynom

Katedra algebry

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika pro informační technologie

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Ďakujem vedúcemu tejto práce doc. RNDr. Davidovi Stanovskému, Ph.D. za ochotu, trpezlivosť a cenné rady pri konzultáciach.

Názov práce: Alexanderov polynóm

Autor: Ľubica Jančová

Katedra: Katedra algebry

Vedúci bakalárskej práce: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Katedra algebry

Abstrakt: Objektom skúmania tejto práce je Alexanderov polynóm v teórii uzlov ako uzlový invariant a rôzne spôsoby jeho výpočtu. Práca sa zameriava na popis výpočtu Alexanderovho polynómu pomocou metód farbenia stien diagramu uzla, farbenia oblúkov diagramu uzla, Seifertovej metódy a metódy pomocou Conwayovho polynómu. Prvá kapitola je venovaná základným pojmom a tvrdeniam z teórie uzlov. Nasledujú kapitoly vysvetľujúce jednotlivé algoritmy výpočtu Alexanderovho polynómu. Záverečná kapitola sa zaoberá možnosťou prepojenia všetkých postupov s využitím Conwayovho polynómu. Hlavnými výsledkami práce sú dôkazy, ktoré by mohli smerovať k ukázaniu ekvivalencie rôznych postupov.

Kľúčové slová: teória uzlov, Alexanderov polynóm, uzlový invariant

Title: Alexander polynomial

Author: Ľubica Jančová

Department: Department of Algebra

Supervisor: doc. RNDr. David Stanovský, Ph.D., Department of Algebra

Abstract: The subject of interest of this thesis is the Alexander polynomial in the knot theory as a knot invariant and various methods of its computation. The thesis focuses on the description of the computation of the Alexander polynomial using four different methods, namely: colouring regions of the knot diagram, colouring arcs of the knot diagram, Seifert's method and the method using the Conway polynomial. In the first chapter we introduce basic notions of the knot theory. In the following chapters we describe methods of computation of the Alexander polynomial. The final chapter deals with the possibility of using the Conway polynomial to show that all of the mentioned methods result in the same polynomial. The main result of this thesis are proofs that might lead to the complete proof of equivalence of algorithms of computation of the Alexander polynomial.

Keywords: knot theory, Alexander polynomial, knot invariant

Obsah

Úvod	2
1 Uzol a základné pojmy z teórie uzlov	3
1.1 Uzol, ekvivalencia uzlov	3
1.2 Linky	4
1.3 Reidemeisterove pohyby	5
1.4 Jednoduché invarianty	6
2 Alexanderov polynóm farbením stien diagramu	7
2.1 Výpočet Alexanderovho polynómu	7
2.2 Alexanderov polynóm ako invariant	8
3 Alexanderov polynóm farbením oblúkov diagramu	12
3.1 Výpočet Alexanderovho polynómu farbením oblúkov diagramu . .	12
3.2 Alexanderov polynóm ako invariant	14
4 Alexanderov polynóm pomocou Seifertových plôch	18
4.1 Seifertova plocha	18
4.2 Krivky na Seifertovej ploche	19
4.3 Konštrukcia Seifertovej matice	20
4.4 S-ekvivalentné Seifertove matice	20
4.5 Alexanderov polynóm zo Seifertovej matice	21
5 Conwayov polynóm a ekvivalencia postupov	23
5.1 Conwayov polynóm	23
5.2 Ekvivalencia postupov výpočtu Alexanderovho polynómu	23
Záver	30
Zoznam použitej literatúry	31
Zoznam obrázkov	32

Úvod

Teória uzlov je odvetvím algebraickej topológie datujúcim svoje začiatky v devätnástom storočí. Hlavným objektom záujmu tejto teórie je uzol — uzatvorená krivka v priestore, ktorý si intuitívne predstavujeme ako zamotaný povrázok so zlepenými koncami. Cieľom teórie uzlov je rozpoznať kedy je možné dva uzly „premotať“ jeden na druhý. Takéto uzly budeme nazývať ekvivalentnými. Zároveň si pokladáme za cieľ vedieť triedy ekvivalencie uzlov kategorizovať do tabuľky. Ako nástroje je možné využiť rôzne uzlové invarianty — vlastnosti, ktoré priradíme uzlu, a ktoré sú nemenné pre navzájom ekvivalentné uzly. Vďaka invariantom dokážeme povedať o dvoch uzloch, že ekvivalentné nie sú, a to práve vtedy, keď sa v nejakom invariante líšia.

V roku 1928 predstavil James Waddell Alexander v článku (Alexander, 1928) prvý polynomiálny uzlový invariant, ktorý dostal názov Alexanderov polynóm. Tento polynomiálny invariant je schopný rozlíšiť všetky neekvivalentné neorientované uzly, ktorých diagramy majú 8 a menej bodov kríženia, zároveň však napríklad nerozlišuje opačne orientované uzly. Alexanderov polynóm je možné vypočítať rôznymi spôsobmi. V tejto práci sa zameriame na štyri z nich.

Najskôr predstavíme základné pojmy teórie uzlov, tomuto je venovaná prvá kapitola. V nasledujúcich troch kapitolách popíšeme tri rôzne spôsoby výpočtu Alexanderovho polynómu spolu s diskusiou ukazujúcou, že Alexanderov polynóm vypočítaný konkrétnym spôsobom je skutočne uzlovým invariantom. V poslednej kapitole sa pokúsime tieto postupy prepojiť pomocou Conwayovho polynómu — štvrtej metódy výpočtu Alexanderovho polynómu.

1. Uzol a základné pojmy z teórie uzlov

V tejto kapitole definujeme základné pojmy a uvedieme niektoré dôležité tvrdenia z teórie uzlov. Vychádzame z textov (Cromwell, 2004), (Murasugi, 1996), (Adams, 2004), (Long, 2005) a (Collins, 2007).

1.1 Uzol, ekvivalencia uzlov

Intuitívne si uzol predstavujeme ako zamotaný povraz, ktorého konce sú spojené. Formálne túto štruktúru definujeme nasledovne:

Definícia 1. Uzlom K rozumieme množinu bodov v \mathbb{R}^3 homeomorfnú kružnici.

Každému uzlu je možné prideliť dve rôzne orientácie. Uzol s pridelenou orientáciou budeme nazývať *orientovaný uzol*.

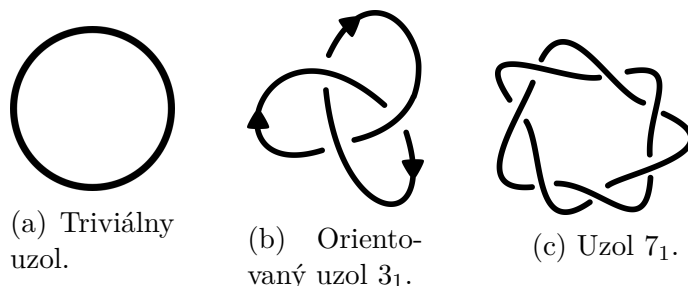
Okrem definície uzla potrebujeme vedieť čo znamená, že jeden uzol sa dá previazať na druhý, bez rozpojenia koncov. Takéto uzly budeme nazývať ekvivalentné. K zavedeniu tohto pojmu budeme potrebovať pojem ambientnej izotopie. Jedná sa o zobrazenie, ktoré zachováva štruktúru a orientáciu uzlov.

Definícia 2. Nech X a Y sú topologické priestory. Izotopiou rozumieme spojité zobrazenie $h : X \times [0,1] \rightarrow Y$ také, že pre každé $t \in [0,1]$ je $h(\bullet, t)$ spojité prosté zobrazenie a $h(\bullet, 0)$ je identické zobrazenie.

Definícia 3. Ambientnou izotopiou medzi uzlami K_1 a K_2 nazveme takú izotopiu $h : \mathbb{R}^3 \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, že $h(K_1, 0) = K_1$ a $h(K_1, 1) = K_2$.

Definícia 4. Nech K_1 a K_2 sú uzly. K_1 a K_2 nazveme ekvivalentné ak medzi nimi existuje ambientná izotopia.

Príklad.

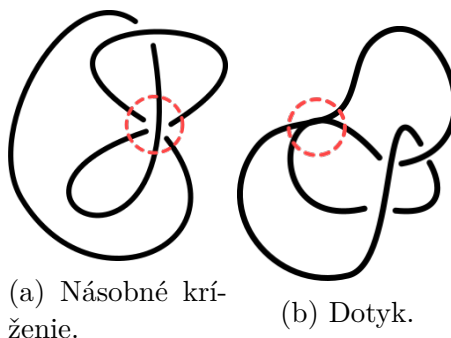


Obr. 1.1: Príklady uzlov.

Poznámka. Ekvivalencia uzlov je reláciou ekvivalencie na množine všetkých uzlov. Jej triedu budeme nazývať typ uzla.

Ďalej sa v tejto práci budeme zaoberať iba *krotkými uzlami*. *Krotkým uzlom* rozumieme uzol, ktorý je ekvivalentný konečnému zjednoteniu úsečiek v \mathbb{R}^3 . Ďalej v texte vždy uzlom rozumieme krotký uzol.

Poznámka. Uzly budeme reprezentovať pomocou ich diagramov. Diagramom uzla rozumieme takú projekciu uzla na rovinu, že obsahuje konečne veľa bodov, v ktorých sa časti uzla prekrižujú. Takéto body nazveme bodmi kríženia diagramu. Ďalej v každom bode projekcie je najviac jedno kríženie (Obr.1.2a) a zároveň v žiadnom bode projekcie sa nenachádza dotyk rôznych častí uzla (Obr.1.2b). Do diagramov budeme taktiež zaznamenávať, ktorá z krížiacich sa častí diagramu prechádza v uzle popod inú jeho časť, prerušíme krivky diagramu v mieste kríženia. Pre orientované uzly značíme orientáciu do diagramu šípku. Diagram nesúci informáciu o orientácii uzla nazývame orientovaný diagram.



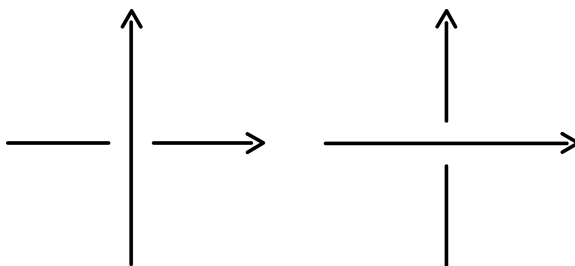
Obr. 1.2: Zakázané prípady diagramov uzlov.

1.2 Linky

Definícia 5. Linkom $L = \{K_1, \dots, K_n\}$ rozumieme konečné disjunktné zjednotenie uzlov K_1, \dots, K_n , $n \in \mathbb{N}$. Uzol K_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ nazveme i -tým komponentom linku L .

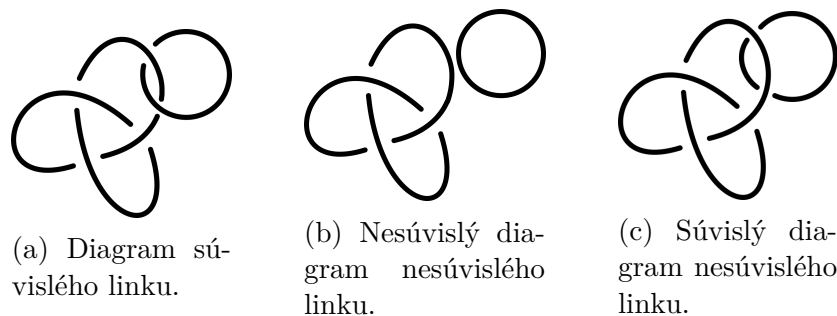
Definícia 6. Orientovaným linkom $L = \{K_1, \dots, K_n\}$ rozumieme konečné disjunktné zjednotenie orientovaných uzlov K_1, \dots, K_n , $n \in \mathbb{N}$.

Poznámka. V bode kríženia diagramu uzla (linku) prirodzene rozlišujeme medzi vrchnou a spodnou časťou krivky diagramu. Budeme tiež rozlišovať medzi takzvaným ľavým a pravým krížením diagramu. Ľavé (pravé) kríženie znamená, že vzhľadom na orientáciu vrchnej časti krivky diagramu uzla, spodná časť krivky pod ňou prechádza smerom zľava doprava (zprava doľava).



Obr. 1.3: Ľavé kríženie (vľavo), pravé kríženie (vpravo).

Poznámka. Prirodzene budeme taktiež rozlišovať medzi súvislým a nesúvislým linkom a súvislým a nesúvislým diagramom linku. Uzol je súvislý link s jedným komponentom.



Obr. 1.4: Súvislé a nesúvislé diagramy linkov.

Definícia 7. *Nech $L = \{K_1, \dots, K_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ je orientovaný link a D jeho orientovaný diagram. Uvažujme pre $i, j \in \{1, \dots, n\}$ jeho komponenty K_i, K_j s orientovanými diagramami D_i a D_j . Nech C_1, \dots, C_v sú body, v ktorých sa krížia diagramy D_i a D_j . Pre žiaden diagram komponentu neberieme do úvahy body, v ktorých sa tento diagram kríži sám so sebou. Nech potom pre $k \in \{1, \dots, v\}$*

$$c_k = \begin{cases} 1 & \text{v bode } C_k \text{ je pravé kríženie} \\ -1 & \text{v bode } C_k \text{ je ľavé kríženie} \end{cases}$$

Potom definujeme krížiacie číslo komponentov K_i a K_j ako

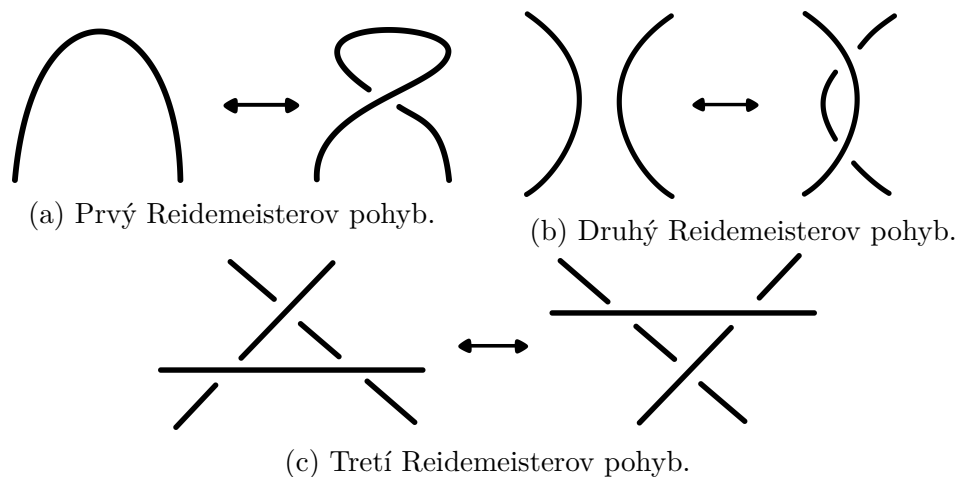
$$lk(K_i, K_j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^v c_k.$$

Definícia 8. *Nech $n, m \in \mathbb{N}$, povieme, že linky $L = \{K_1, \dots, K_n\}$ a $L' = \{K'_1, \dots, K'_m\}$ sú ekvivalentné, ak platí $n = m$ a existuje ambientná izotopia medzi $K_1 \cup \dots \cup K_n$ a $K'_1 \cup \dots \cup K'_m$.*

1.3 Reidemeisterove pohyby

Nasledujúca veta dáva náhľad do toho, v akom vzájomnom vzťahu sú diagramy ekvivalentných uzlov.

Veta 1 (Reidemeisterova). *Dva uzly K_1 a K_2 sú ekvivalentné vtedy a len vtedy, ak existuje konečná postupnosť Reidemeisterových pohybov taká, že prevedie diagram uzla K_1 na diagram uzla K_2 . Reidemeisterovými pohybmi rozumieme nasledujúce pohyby:*



Obr. 1.5: Reidemeisterove pohyby.

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v (Murasugi, 1996, kapitola 4). □

Poznámka. Uvažujme nesúvislý link L a jeho nesúvislý diagram D . Potom aplikáciou druhého Reidemeisterovho pohybu na nesúvislé komponenty diagramu D je možné získať súvislý diagram D' nesúvislého linku L' . Linky L a L' sú podľa vety 1 ekvivalentné. Teda ku každému nesúvislému linku dokážeme nájsť ekvivalentný link so súvislým diagramom.

1.4 Jednoduché invarianty

Pre zistenie, či sú dva uzly ekvivalentné, teda ich diagramy sa dajú na seba previesť transformáciou konečným množstvom Reidemeisterových pohybov, je užitočné nájsť vlastnosť, ktorá je pre danú triedu ekvivalencie uzlov rovnaká. Znamená to, že pokiaľ sa dva uzly líšia v tejto vlastnosti, potom nie sú ekvivalentné. Takúto vlastnosť nazveme *invariant*.

Príklad. Nech \mathcal{K} je typ uzla a $K \in \mathcal{K}$ uzol. Označme \mathcal{D} množinu všetkých diagramov D typu uzla \mathcal{K} . Pre $D \in \mathcal{D}$ označme $c(D)$ počet bodov kríženia diagramu D . Potom je

$$c(K) = \min_{D \in \mathcal{D}} c(D)$$

uzlový invariant. Dôkaz je možné nájsť v (Murasugi, 1996, kapitola 4, sekcia 2)

Veta 2. *Krížiace číslo je linkový invariant.*

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v (Murasugi, 1996, kapitola 4, sekcia 5) □

2. Alexanderov polynóm farbením stien diagramu

Alexanderov polynóm je polynomiálny uzlový invariant. V tejto kapitole ukážeme pôvodnú metódu výpočtu Alexanderovho polynómu z článku J. W. Alexandera a uvedieme tvrdenia ukazujúce, že sa skutočne jedná o invariant. Táto kapitola vychádza z textov (Alexander, 1928), (Long, 2005) a (Collins, 2007).

2.1 Výpočet Alexanderovho polynómu

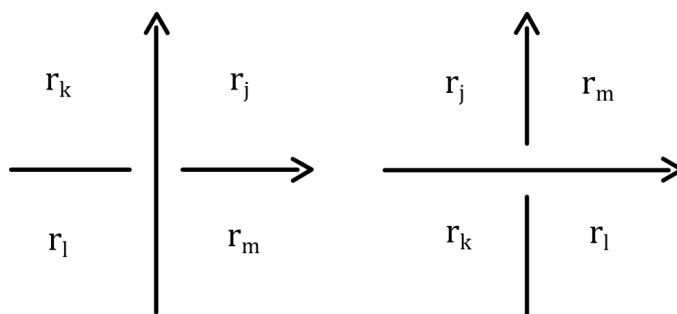
Nech K je orientovaný uzol a D jeho orientovaný diagram s nenulovým počtom bodov kríženia. Nech má D kríženie vo v bodoch, ktoré označíme C_1, \dots, C_v .

Uvážme rovinný graf, vytvorený z diagramu D , tak, že body kríženia diagramu uzla odpovedajú vrcholom a krivky diagramu prepájajúce body kríženia odpovedajú hranám. Potom v je počet vrcholov grafu a $2v$ je počet jeho hrán, keďže každá hrana spája dva vrcholy a do každého vrcholu vstupujú štyri hrany. Eulerova veta pre rovinné grafy hovorí, že platí vzťah $V - E + F = 2$, kde V je počet vrcholov grafu, E počet hrán grafu a F počet jeho stien. Spolu dostávame, že stien, na ktoré diagram D delí rovinu je $v + 2$ (vrátane vonkajšej steny).

Ďalej pridáme stenám premenné r_1, \dots, r_{v+2} . Pre každý bod kríženia diagramu zostavíme rovnicu

$$tr_j - tr_k + r_l - r_m = 0$$

kde r_j, r_k, r_l a r_m sú premenné odpovedajúce stenám okolo bodu kríženia tak, ako zobrazuje obrázok 2.1.



Obr. 2.1: Označenie stien pre ľavé a pravé kríženie.

Takto získame v rovníc o $v + 2$ neznámych, z ktorých vytvoríme maticu M tvaru $v \times (v + 2)$. Každý riadok matice M bude reprezentovať jeden bod kríženia a každý stĺpec jednu zo stien, na ktoré je rovina rozdelená diagramom uzla. V každom riadku sa bude práve jedenkrát nachádzať každý z prvkov z $\{-1, 1, -t, t\}$ a to v stĺpcoch odpovedajúcich stenám obklopujúcim bod kríženia. (Môže nastať situácia, že viaceré oblasti prilehlé k niektorému bodu kríženia sú rovnakou stenou, potom sa niektoré z koeficientov môžu nachádzať v jednom prvku matice v súčte.) V ostatných stĺpcoch v tomto riadku bude prvok 0.

Následne z matice vymažeme dva ľubovoľné stĺpce p a q , také, že odpovedajú dvom susedným stenám. Maticu M po vymazaní týchto dvoch stĺpcov označíme $M_{p,q}$. Matica $M_{p,q}$ je tvaru $v \times v$ a nazývame ju *Alexanderova matica*.

Označme $\Delta_{p,q}$ determinant matice $M_{p,q}$, potom $\Delta_{p,q}$ je polynóm v premennej t s celými koeficientami. Po normalizovaní budeme tento polynóm nazývať *Alexanderov polynóm*.

Poznámka. Uzol s diagramom s nulovým počtom bodov kríženia je práve triviálny uzol s diagramom ako na obrázku 1.1a. Keďže nemá žiadne body kríženia, nemohli by sme zostaviť rovnice tak, ako v predchádzajúcom postupe. Dostali by sme prázdnu maticu, z ktorej by sme však mali odstrániť dva stĺpce. Preto sme ho z tohto postupu vynechali a dodefinujeme jeho Alexanderov polynóm rovný Alexanderovmu polynómu jemu ekvivalentného uzla s jedným krížením získaného aplikáciou prvého Reidemeisterovho pohybu na pôvodný triviálny uzol.

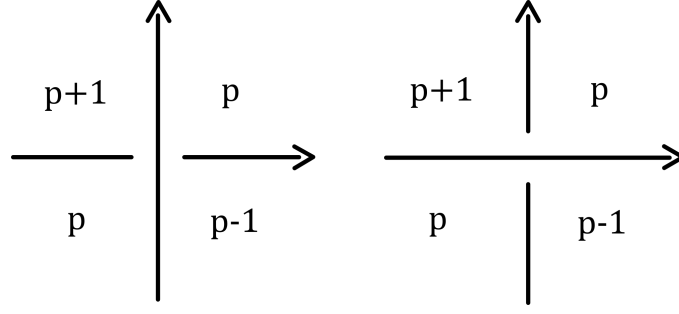
2.2 Alexanderov polynóm ako invariant

Zatiaľ sme dospeli k polynómu $\Delta_{p,q}$. Tento polynóm síce sám o sebe nie je uzlovým invariantom, ale je možné z neho žiadaný invariant odvodiť. Najskôr sa pozrieme na to, ako ovplyvní výber stĺpcov p a q determinant výslednej štvorcovej matice.

Veta 3. *Nech M tvaru $v \times (v + 2)$ je matica získaná z diagramu uzla postupom popísaným vyššie. Nech $M_{k,l}$ a $M_{k',l'}$ sú matice, ktoré vzniknú z matice M postupne vynechaním k -tého a l -tého stĺpca a vynechaním k' -tého a l' -tého stĺpca. Kde stĺpce k a l , taktiež ako k' a l' odpovedajú dvom susediacim stenám a nech $\Delta_{k,l}$ a $\Delta_{k',l'}$ sú postupne determinanty týchto matíc. Potom sa $\Delta_{k,l}$ a $\Delta_{k',l'}$ líšia len o násobok $\pm t^j$, $j \in \mathbb{Z}$.*

Dôkaz. Tento dôkaz pochádza z textov (Alexander, 1928) a (Long, 2005). Pre dôkaz tejto vety každej stene priradíme celé číslo, ktoré budeme nazývať indexom steny. Indexy stenám priradujeme tak, že na začiatku priradíme ľubovoľnej stene ľubovoľný index $p \in \mathbb{Z}$ a indexy ostatných stien dopočítame podľa nasledujúcich pravidiel:

- Ak sa dostaneme na stenu bez priradeného indexu prechodom cez krivku diagramu smerom zľava doprava, vzhľadom na orientáciu krivky diagramu, zo steny s indexom p , označíme túto stenu indexom $p - 1$.
- Ak sa dostaneme na stenu bez priradeného indexu prechodom cez krivku diagramu zprava doľava vzhľadom na orientáciu krivky diagramu, zo steny s indexom p , označíme túto stenu indexom $p + 1$.



Obr. 2.2: Indexovanie stien pre ľavé a pravé kríženie.

Poznamenáme, že takéto indexovanie stien je korektné a jednoznačné až na aditívnu konštantu.

Každý stene odpovedá stĺpec matice M . Ak má nejaká stena index $p \in \mathbb{Z}$ povieme, že stĺpec, ktorý jej odpovedá má index p .

Zvoľme indexovanie stien tak, že existuje aspoň jedna stena s indexom 0. Označme poradie ľubovného stĺpca matice M odpovedajúceho takej stene a .

Ďalej označíme \mathcal{P} množinu indexov všetkých stien, na ktoré diagram uzla rozdelil rovinu a R_p súčet všetkých stĺpcov s indexom $p \in \mathcal{P}$. Potom, keďže každý riadok obsahuje práve jedenkrát každý z prvkov $t, -t, 1, -1$ a ostatné prvky sú 0, platí:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} R_p = o \quad (2.1)$$

kde o značí nulový stĺpec. Každý riadok matice M odpovedá jednému bodu kríženia a nenulové prvky sú v tomto riadku iba v stĺpcoch korešpondujúcich so stenami prilahlými k bodu kríženia. Z obrázku 2.2 vidíme závislosť indexov týchto stien. Vynásobením každého stĺpca s indexom p faktorom t^{-p} teda dostávame súčet prvkov v riadku pre pravé kríženie $tt^{-(p+1)} - tt^{-p} + t^{-(p-1)} - t^{-p} = 0$ a pre ľavé kríženie $tt^{-p} - tt^{-(p+1)} + t^{-p} - t^{-(p-1)} = 0$. Z toho dostávame:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} t^{-p} R_p = o \quad (2.2)$$

Odčítaním vzťahov (2.2) a (2.1) dostávame:

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} (t^{-p} - 1) R_p = o \quad (2.3)$$

Keďže index a -teho stĺpca je 0 a $t^0 - 1 = 0$ dostávame:

$$\sum_{p \in \mathcal{P} \setminus 0} (t^{-p} - 1) R_p = o \quad (2.4)$$

Znamená to, že pre $p \in \mathcal{P} \setminus 0$ vieme vyjadriť $(t^{-p} - 1) R_p$ ako lineárnu kombináciu R_i , $i \in \mathcal{P} \setminus \{0, p\}$ s koeficientami $-(t^{-i} - 1)$.

Nech $k, k' \in \{1, \dots, v+2\} \setminus a$. Uvažujme teraz determinanty matíc $M_{a,k}$ a $M_{a,k'}$, teda $\Delta_{a,k}$ a $\Delta_{a,k'}$. Nech stĺpce k a k' postupne odpovedajú stenám s indexami p a p' . Keďže pripočítanie n -násobku jedného stĺpca matice k inému nemení jej determinant a permutácia stĺpcov ovplyvní determinant nanajvýš násobením -1 , dostávame:

$$(t^{-p} - 1) \Delta_{a,k'} = \pm (t^{-p'} - 1) \Delta_{a,k} \quad (2.5)$$

Nech index stĺpca l je q a index stĺpca l' je q' . Keďže indexy stien môžeme posunúť o ľubovoľnú konštantu, platí tiež:

$$(t^{q'-p} - 1)\Delta_{l',k'} = \pm(t^{q'-p'} - 1)\Delta_{l',k} \quad (2.6)$$

$$(t^{p-q} - 1)\Delta_{k,l'} = \pm(t^{p-q'} - 1)\Delta_{k,l} \quad (2.7)$$

Z toho plynie:

$$\Delta_{k,l} = \pm \frac{(t^{p-q} - 1)\Delta_{k,l'}}{t^{p-q'} - 1} = \pm \frac{(t^{p-q} - 1)(t^{q'-p} - 1)\Delta_{l',k'}}{(t^{q'-p'} - 1)(t^{p-q'} - 1)} = \pm \frac{(t^{p-q} - 1)t^{q'-p}\Delta_{l',k'}}{t^{q'-p'} - 1} \quad (2.8)$$

V našom prípade sú steny príslušné stĺpcom k a l susedné, teda sa ich indexy líšia práve o 1. Bez újmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $p = q + 1$. Taktiež pre indexy stien príslušné stĺpcom k' a l' bez újmy na všeobecnosti predpokladáme $q' = p' + 1$. Potom dostávame:

$$\Delta_{k,l} = \pm \frac{(t - 1)t^{q'-p}\Delta_{l',k'}}{t - 1} = \pm t^{q'-p}\Delta_{l',k'} \quad (2.9)$$

Tým je dôkaz dokončený. \square

Ďalej v súlade s (Long, 2005) zavedieme pojem ϵ -ekvivalentných matíc. ϵ -ekvivalencia matíc odpovedá vzťahu rôznych Alexanderových matíc príslušných k rovnakému typu orientovaného uzla.

Definícia 9. Matice M_1 a M_2 nazveme ϵ -ekvivalentné ak je možné previesť maticu M_1 na maticu M_2 konečnou postupnosťou nasledujúcich operácií:

1. Násobenie riadku, alebo stĺpca matice prvkom -1
2. Výmena dvoch stĺpcov, alebo riadkov
3. Pripočítanie jedného stĺpca (riadku) k inému
4. Vynásobenie, alebo vydelenie stĺpca premennou t
5. Pridanie alebo odstránenie prvého riadku a prvého stĺpca, kde prvok na pozícii (1,1) je 1 a všetky ostatné prvky sú nulové

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \end{pmatrix}$$

Operácie 1. a 2. ovplyvnia determinant matice nanajvýš zmenou znamienka, operácie 3. a 5. na determinant vplyv nemajú a operácia 4. mení determinant iba o násobok $t^{\pm 1}$. Teda pre dve ϵ -ekvivalentné matice platí, že ich determinanty sa líšia iba o násobok $\pm t^k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Veta 4. Nech K_1 a K_2 sú ekvivalentné uzly a D_1 a D_2 ich diagramy. Nech M_1 a M_2 sú k nim príslušné Alexanderove matice. Potom sú M_1 a M_2 ϵ -ekvivalentné matice.

Dôkaz. Dôkaz sa prevedie ukázaním, že matice diagramov zostanú ϵ -ekvivalentné aj po prevedení každého z troch Reidemeisterových pohybov na diagram uzla. Podrobnosti je možné nájsť v (Long, 2005, sekcia 3.3). \square

Veta 4 dokazuje, že determinant Alexanderovej matice v premennej t je polynomiálny uzlový invariant až na násobok $\pm t^k$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Jeho normalizovaný tvar budeme nazývať *Alexanderov polynóm*.

Definícia 10. Alexanderov polynóm *definujeme ako taký $\pm t^k$ -násobok determinantu Alexanderovej matice, že všetky jeho exponenty sú nezáporné a člen s najnižším exponentom je kladná konštanta.*

Poznámka. Táto metóda výpočtu Alexanderovho polynómu je určená pre uzly. Napriek tomu sa dá ľahko rozšíriť na linky. Pre linky všetky tvrdenia tejto kapitoly fungujú rovnako ako pre uzly. Jedinými výnimkami sú:

1. Nesúvislý link s nulovým počtom bodov kríženia zložený z triviálnych uzlov. Pre tento dodefinujeme Alexanderov polynóm rovný polynómu ekvivalentného linku, ktorého diagram každého komponentu vznikol z pôvodného diagramu komponentu aplikáciou prvého Reidemeisterovho pohybu. Každý komponent má teda diagram s práve jedným bodom kríženia.
2. Prípade linku s nesúvislým diagramom, kde neplatí, že počet stien je $v + 2$. V tomto prípade je Alexanderova matica obdĺžniková, teda singulárna a jej determinant je 0. Preto je Alexanderov polynóm nesúvislého linku rovný nulovému polynómu.

3. Alexanderov polynóm farbením oblúkov diagramu

V tejto kapitole ukážeme alternatívnu metódu výpočtu Alexanderovho polynómu. Budeme vychádzať z textov (May, 2006, kapitola 1), (Messer a Straffin, 2006, sekcia 2.5) a (Lopez).

3.1 Výpočet Alexanderovho polynómu farbením oblúkov diagramu

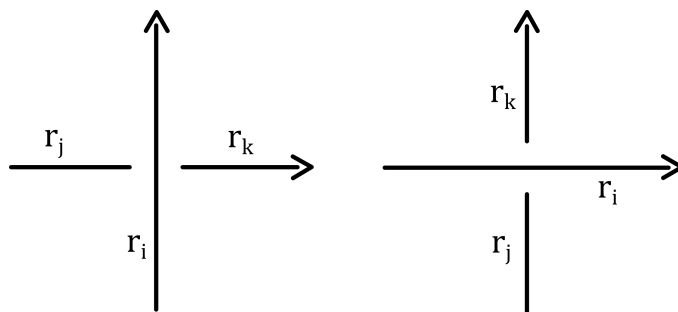
Nech K je orientovaný uzol, alebo link so súvislým orientovaným diagramom D . V bode kríženia diagramu značíme podchádzajúcu časť uzla prerušením krivky diagramu. Diagram sa týmto rozdelí na niekoľko spojitých kriviek, tieto budeme nazývať *oblúky*.

Nech diagram D obsahuje $n \geq 1$ bodov kríženia. Potom má práve n oblúkov. Každému oblúku pridáme premennú r_i pre $i \in \{1, \dots, n\}$. Pre každý bod kríženia zostavíme rovnicu o premenných príslušných oblúkom stretávajúcim sa v danom bode kríženia. Pre oblúky s premennými ako na obrázku 3.1 máme rovnice v prípade ľavého kríženia:

$$(1 - t)r_i + tr_j - r_k = 0$$

a v prípade pravého kríženia:

$$(1 - t)r_i - r_j + tr_k = 0$$



Obr. 3.1: Označenie oblúkov pre ľavé a pravé kríženie.

Z rovníc pre všetky body kríženia zostavíme štvorcovú maticu M rádu n . Vyberme ľubovoľné $i, j \in \{1, \dots, n\}$ a označme $M_{i,j}$ maticu, ktorá vznikne z matice M odstránením i -tého riadku a j -tého stĺpca. Determinant matice $M_{i,j}$ je polynóm zo $\mathbb{Z}[t]$. Tento polynóm po vynásobení prvkom $\pm t^k$, kde $k \in \mathbb{Z}$ tak, že všetky jeho exponenty sú nezáporné a člen s najnižším exponentom je kladná konštanta nazveme *Alexanderov polynóm*.

Týmto postupom sme definovali Alexanderov polynóm pre linky (uzly) so súvislým diagramom s aspoň jedným bodom kríženia. Ak má diagram uzla (linku)

nulový počet krížení, nutne sa jedná o triviálny uzol, alebo link zložený z nesúvislých triviálnych uzlov. Na tieto prípady sa vyššie uvedený postup nedá aplikovať, keďže nie je možné zostrojiť maticu M a následne z nej odstrániť jeden riadok a jeden stĺpec.

Alexanderov polynóm triviálneho uzla s diagramom s 0 kríženiami dodefínujeme ako rovný Alexanderovmu polynómu získanému z ekvivalentného uzla s diagramom s jedným bodom kríženia. Tento je možné získať aplikáciou prvého Reidemeisterovho pohybu.

Alexanderov polynóm nesúvislého linku L s diagramom D s nulovým počtom krížení, kde každý komponent linku L je triviálnym uzlom, definujeme ako Alexanderov polynóm ekvivalentného linku, v ktorom diagram každého komponentu vznikol aplikáciou prvého Reidemeisterovho pohybu na pôvodný diagram komponentu a teda má práve jeden bod kríženia.

Ďalej poznamenáme, že pre nesúvislý link L s nesúvislým diagramom D_L s aspoň jedným bodom kríženia je možné zostrojiť maticu M a aplikovať pôvodný postup. Pokiaľ je však niektorý zo súvislých komponentov diagramu D_L diagram triviálneho uzla s nulovým počtom krížení, je matica M obdĺžniková a teda aj po odstránení jedného riadku a stĺpca je jej determinant nulový. Teda Alexanderov polynóm takéhoto linku je nulový polynóm.

Poznámka. Matica vytvorená týmto postupom obsahuje prvky zo $\mathbb{Z}[t]$, môžeme ju teda uvažovať ako maticu nad telesom $\mathbb{Q}(t)$.

Nasledujúca veta ukazuje, aký tvar má Alexanderov polynóm nesúvislého linku s nesúvislým diagramom.

Veta 5. *Nech L je nesúvislý link s nesúvislým diagramom D . Potom je jeho Alexanderov polynóm (definovaný ako v tejto kapitole) nulový polynóm.*

Dôkaz. Ak diagram D linku L obsahuje ako komponent diagram triviálneho uzla s nulovým počtom krížení, jeho Alexanderov polynóm je z vyššie uvedenej diskusie nulový polynóm.

Nech teda D neobsahuje ako komponent diagram triviálneho uzla s nulovým počtom krížení. Potom zostrojíme maticu M . Každý riadok matice M odpovedá jednému bodu kríženia. Nenulové prvky v tomto riadku sú iba v stĺpcoch odpovedajúcich oblúkom, ktoré sa v tomto bode kríženia stretávajú. Nenulové prvky v riadku matice sú teda práve $1 - t, t$ a -1 , alebo nejaké ich súčty, pokiaľ sa niektorý z oblúkov v tomto bode kríženia nachádza viackrát. Súčet prvkov v každom riadku je preto $1 - t + t - 1 = 0$. Označme m_1, m_2, \dots, m_n stĺpce matice M . Potom teda $m_1 + m_2 + \dots + m_n = o$, kde o značí nulový stĺpcový vektor rádu n . Množina stĺpcov $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ je preto lineárne závislá. Ďalej odstráňme z matice M i -ty riadok, kde $i \in \{1, \dots, n\}$ a novú maticu označme M_i . Množina stĺpcov matice M_i je taktiež lineárne závislá. Nakoniec odstráňme z matice M_i j -ty stĺpec a označme novú štvorcovú maticu $M_{i,j}$, táto je rádu $n - 1$. Ďalej ukážeme, že množina stĺpcov matice $M_{i,j}$ je tiež lineárne závislá.

Stĺpec m_j odpovedal jednému z oblúkov nejakého súvislého komponentu diagramu D . Vyberme ľubovoľný iný komponent diagramu D a označme ho D' . D' je súvislý diagram linku, alebo uzla. Uvažujme stĺpce matice M odpovedajúce oblúkom diagramu D' a označme ich l_1, \dots, l_k , kde $k \in \mathbb{N}$, $k < n$. Tieto stĺpce majú nuly v riadkoch, ktoré neodpovedajú bodom kríženia v komponente D' , lebo odpovedajúce oblúky nevstupujú do žiadneho kríženia mimo tohto komponentu.

Ďalej, riadky matice M , ktoré odpovedajú bodom kríženia komponentu D' majú nenulové prvky iba v stĺpcoch l_1, \dots, l_k , lebo do žiadneho kríženia komponentu D' nevstupuje žiaden oblúk z iného komponentu. Preto $l_1 + \dots + l_k = o$ a teda množina stĺpcov $\{l_1, \dots, l_k\} \subset \{m_1, \dots, m_{j-1}, m_{j+1}, \dots, m_n\}$ je lineárne závislá. Množina stĺpcov $\{l_1, \dots, l_k\}$ po vynechaní i -tej zložky každého z nich bude tiež lineárne závislá. Teda stĺpce matice $M_{i,j}$ sú pre ľubovoľnú voľbu i, j lineárne závislé, takže $\det M_{i,j} = 0$ a teda Alexanderov polynóm linku L s diagramom D je nulový polynóm. Zároveň nezáleží na poradí stĺpcov a riadkov v matici M . \square

3.2 Alexanderov polynóm ako invariant

V tejto sekcii dokážeme, že Alexanderov polynóm je uzlový (linkový) invariant. K tomuto dôkazu potrebujeme ukázať, že normalizovaný tvar Alexanderovho polynómu nezávisí na voľbe odstráneného riadku i a stĺpca j a voľbe poradia riadkov a stĺpcov matice M a zároveň je nemenný pri Reidemeisterových pohyboch.

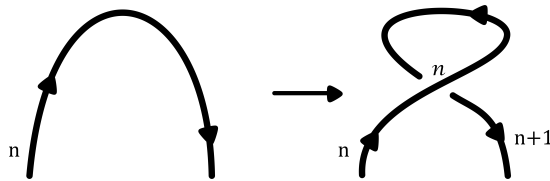
Veta 6. *Nech M je matica získaná z uzla (linku) K , ktorý má $n \in \mathbb{N}$ bodov kríženia, postupom zo sekcie 3.1. Nech $i, j, l, m \in \mathbb{N}$, $i, j, l, m \leq n$ a $M_{i,j}$, $M_{l,m}$ sú postupne matice získané z matice M odstránením riadku i a stĺpca j a odstránením riadku l a stĺpca m . Potom sa determinanty matíc $M_{i,j}$ a $M_{l,m}$ líšia len násobkom $\pm t^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ďalej zmena poradia riadkov a stĺpcov matice M ovplyvní determinant matice $M_{i,j}$ tiež iba násobkom $\pm t^k$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Dôkaz. Dôkaz tohto tvrdenia je uvedený v (Messer a Straffin, 2006, sekcia 2.5). \square

Veta 7. *Alexanderov polynóm definovaný postupom v tejto kapitole je uzlový (linkový) invariant.*

Dôkaz. Chceme ukázať, že Alexanderov polynóm nezávisí na diagrame zvoleného reprezentanta triedy ekvivalencie uzlov. Podľa vety 1 nám stačí ukázať jeho invarianciu až na násobok $\pm t^k$, $k \in \mathbb{Z}$ pri Reidemeisterových pohyboch. Toto je možné rozobrať všetkých prípadov. Tu pre ilustráciu uvedieme dôkaz invariance pre jeden prípad pre každý typ Reidemeisterovho pohybu. Ďalšie prípady vzniknú zmenou orientácie niektorých oblúkov a dôkaz invariance prebieha podobne. Pre ľubovoľnú maticu M budeme v tomto dôkaze značiť $M_{i,j}$ maticu, ktorá vznikne z M vynechaním i -teho riadku a j -teho stĺpca. Majme teda uzol (link) K s diagramom D , ktorý má pred transformáciou Reidemeisterovým pohybom n bodov kríženia. Z neho vytvoríme maticu M postupom z tejto kapitoly. Uzol (link) po transformácii Reidemeisterovým pohybom označíme K' , jeho diagram D' a odpovedajúcu maticu M' .

1. Prvý Reidemeisterov pohyb



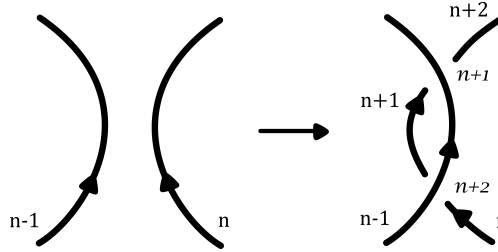
Obr. 3.2: Transformácia prvým Reidemeisterovým pohybom.

Uvažujme orientáciu ako na obrázku 3.2. Matica M diagramu D je rádu n a matica M' diagramu D' rádu $n + 1$. Vďaka vete 6 môžeme bez újmy na všeobecnosti usporiadať riadky a stĺpce matíc M a M' tak, že oblúky zobrazené na obrázku 3.2 odpovedajú n -tému stĺpcu matice M a stĺpcom n a $n + 1$ matice M' . Taktiež usporiadame riadky matice M' tak, aby bod kríženia na obrázku odpovedal riadku $n + 1$. Zvyšné stĺpce a riadky matíc M a M' usporiadame ľubovoľne, no zhodne pre tieto dve matice. Matice potom vyzerajú nasledovne:

$$\begin{pmatrix} & a_{1,n} \\ & a_{2,n} \\ A & \vdots \\ & a_{n,n} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & a_{1,n} & 0 \\ & a_{2,n} & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ & a_{k,n} & 0 \\ A & 0 & a_{k+1,n} \\ & \vdots & \vdots \\ & 0 & a_{n,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Kde A je blok tvaru $n \times (n - 1)$. Odstránime teraz z matice M riadok n a stĺpec n a z matice M' odstránime riadok n a stĺpec $n + 1$. Potom rozvojom matice $M'_{n,n+1}$ podľa n -tého riadku (odpovedá riadku $n + 1$ matice M') dostávame $\det M'_{n,n+1} = (-1)^{2n} \cdot 1 \cdot \det M_{n,n} = \det M_{n,n}$.

2. Druhý Reidemeisterov pohyb



Obr. 3.3: Transformácia druhým Reidemeisterovým pohybom.

Majme teraz situáciu ako na obrázku 3.3. Nech stĺpce $n - 1$ a n matice M odpovedajú oblúkom na obrázku. Nech stĺpce $n - 1$, n , $n + 1$, $n + 2$ matice M' odpovedajú oblúkom na obrázku a riadky $n + 1$, $n + 2$ bodom kríženia na obrázku. Ostatné oblúky a body kríženia číslujeme opäť ľubovoľne, ale rovnako pre matice M a M' . Potom máme:

$$\begin{pmatrix} & a_{1,n} \\ & a_{2,n} \\ A & \vdots \\ & a_{n,n} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & a_{1,n} & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{k,n} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & a_{k+1,n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 & a_{n,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 - t & 0 & t & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 - t & -1 & t & 0 \end{pmatrix}$$

Kde A je blok tvaru $n \times (n-1)$, pre $i \in \{1, \dots, n\}$ je $a_{i,n}$ prvok v n -tom stĺpci a i -tom riadku matice M a $k \in \{1, \dots, n\}$. Odstráňme teraz z matice M riadok n a stĺpec n . Z matice M' odstráňme riadok n a stĺpec $n+2$. Urobíme rozvoj matice $M'_{n,n+2}$ podľa stĺpca $n+1$. Dostaneme:

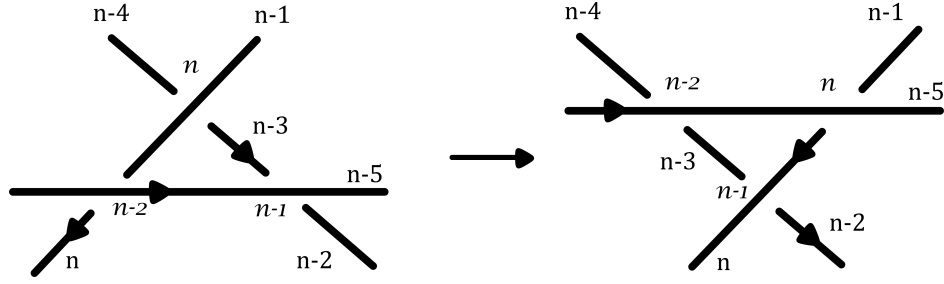
$$\begin{aligned} \det M'_{n,n+2} = & (-1)^{2n+1} \cdot t \cdot \det \begin{pmatrix} & & & & a_{1,n} \\ & & & & \vdots \\ & M_{n,n} & & & a_{k,n} \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1-t & -1 \end{pmatrix} \\ & + (-1)^{2n+2} \cdot t \cdot \det \begin{pmatrix} & & & & a_{1,n} \\ & & & & \vdots \\ & M_{n,n} & & & a_{k,n} \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1-t & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ďalej urobíme rozvoj oboch matíc z rovnice 3.1 podľa posledného riadku. Označíme $(M_{n,n})_{n-1}$ maticu $M_{n,n}$ po vynechaní stĺpca $n-1$.

$$\begin{aligned} \det M'_{n,n+2} = & -t \cdot ((-1)^{2n-1} \cdot (1-t) \cdot \det \begin{pmatrix} & & & & a_{1,n} \\ & & & & \vdots \\ & (M_{n,n})_{n-1} & & & a_{k,n} \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \\ & + (-1)^{2n} \cdot (-1) \cdot \det M_{n,n}) \\ & + t \cdot ((-1)^{2n-1} \cdot (1-t) \cdot \det \begin{pmatrix} & & & & a_{1,n} \\ & & & & \vdots \\ & (M_{n,n})_{n-1} & & & a_{k,n} \\ & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}) \\ = & t \cdot \det M_{n,n} \end{aligned}$$

Tým je tento prípad dokončený.

3. Tretí Reidemeisterov pohyb



Obr. 3.4: Transformácia tretím Reidemeisterovým pohybom.

Opäť usporiadame riadky a stĺpce matíc M a M' tak, aby boli v súlade s obrázkom 3.4. Značnie oblúkov pred a po transformácii tretím Reidemeisterovým pohybom sme zvolili tak, že zložky matíc M a M' v riadkoch odpovedajúcich iným než zobrazeným bodom kríženia budú rovnaké. Matice majú tvar:

$$M = \begin{pmatrix} & & & & A & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 1-t & 0 & t & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 1-t & 0 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} & & & & A & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1-t & t & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1-t & 0 & 0 & 0 & t & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & t & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

Kde A je blok tvaru $(n-3) \times n$. Teraz odstráňme z matíc M a M' riadok n a stĺpec $(n-5)$. Následne urobíme rozvoj oboch matíc $M_{n,n-5}$ a $M'_{n,n-5}$ podľa $(n-4)$ -tého stĺpca (odpovedá stĺpcu $n-3$ pred odstránením stĺpca $(n-5)$). Poznamenáme, že stĺpec $n-3$ matice A je celý nulový, lebo oblúk $n-3$ okrem bodov kríženia na obrázku 3.4 nevstupuje do žiadneho bodu kríženia. Označme A' maticu A po odstránení stĺpcov $n-3$ a $n-5$. Označme

$$B = \begin{pmatrix} & & & & A' & & & & \\ 0 & \dots & 0 & t & -1 & & & & \end{pmatrix}$$

Potom

$$\det M = (-1)^{2n-5} \cdot t \cdot \det B = -t \det B$$

$$\det M' = (-1)^{2n-6} \cdot (-1) \cdot \det B = -\det B$$

Teda spolu dostávame $\det M = t \cdot \det M'$. Tým je tento prípad dokončený.

Overili sme invarianciu Alexanderovho polynómu až na násobok $\pm t^k, k \in \mathbb{Z}$ pri aplikácii Reidemeisterových pohybov pri niektorých konkrétnych orientáciach oblúkov. Prípady pre iné orientácie oblúkov sa overia obdobne. Týmto je veta dokázaná. \square

4. Alexanderov polynóm pomocou Seifertových plôch

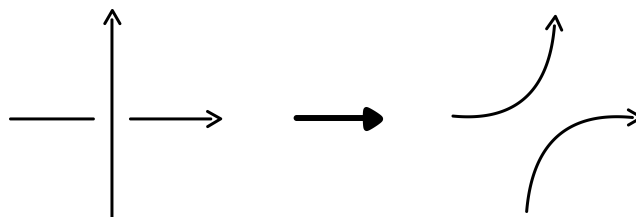
Táto kapitola popisuje výpočet Alexanderovho polynómu pomocou Seifertových plôch. Vychádzame z textov (Murasugi, 1996, kapitoly 5,6) a (Cromwell, 2004, kapitoly 5-7).

4.1 Seifertova plocha

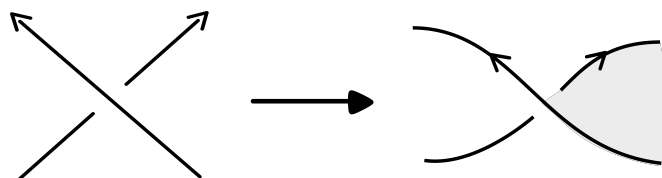
Veta 8. *Nech K je ľubovoľný uzol, alebo súvislý link. Potom v \mathbb{R}^3 existuje orientovateľná spojitá plocha, taká, že K tvorí jej hranicu.*

Dôkaz. Dôkaz tejto vety je popísaný v (Cromwell, 2004, sekcia 5.1) a v (Murasugi, 1996, sekcia 5.1), napriek tomu ho pre dobrú predstavu čitateľa uvedieme aj tu. Dôkaz spočíva v konštrukcii takej orientovateľnej plochy, že uzol (link) K tvorí jej hranicu. Postup vytvorenia tejto plochy nazývame Seifertov algoritmus. Jednotlivé kroky Seifertovho algoritmu:

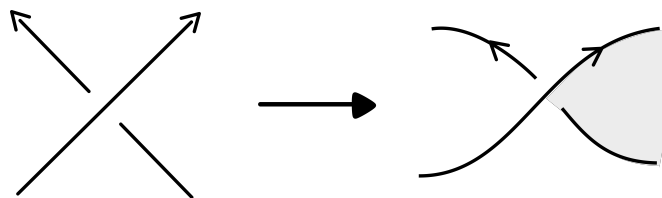
1. Nech D je orientovaný diagram uzla (linku) K . Ak K nie je orientovaný uzol, ľubovoľne zvolíme jeho orientáciu. Ak K je neorientovaný link, ľubovoľne zvolíme orientáciu každého jeho komponentu.
2. V každom bode kríženia diagramu D urobíme nasledujúcu transformáciu: odstránime kríženie a pôvodne krížiac sa krivky diagramu napojíme tak, aby sme zachovali ich orientáciu. Tento krok je zobrazený na obrázku 4.1.
3. Z diagramu vznikla sada uzatvorených okruhov, v ktorej už nie sú žiadne body kríženia. Tieto okruhy môžu byť do seba vhníezené. Teraz vytvoríme pre každý z týchto okruhov orientovanú plochu v \mathbb{R}^3 tak, že okruh je projekciou jej hranice a slučka pôvodného uzla je jej hranicou. Orientáciu vytvoreného disku odvodíme z diagramu. Ak je okruh orientovaný proti smeru hodinových ručičiek, vrchnej strane disku priradíme kladnú orientáciu a spodnej zápornú. Ak je okruh orientovaný v smere hodinových ručičiek, vrchnej strane disku priradíme zápornú a spodnej kladnú orientáciu.
4. V miestach, kde sa pôvodne nachádzali body kríženia diagramu, napojíme k už vytvoreným diskom polootočené obdĺžnikové prúžky (obrázok 4.2). Smer ich otočenia je určený tým, či sa jednalo o pravé, alebo ľavé kríženie diagramu. Podľa toho budeme hovoriť o pravotočivom, alebo ľavotočivom prúžku.



Obr. 4.1: Odstránenie kríženia.



(a) Lavotočivý prúžok.



(b) Pravotočivý prúžok.

Obr. 4.2: Konštrukcia prúžkov.

Všimneme si, že sme vytvorili spojitú plochu, ktorej hranicou je uzol (link) K . Disky tejto plochy sa môžu nachádzať na rôznych úrovniach. Pokiaľ sme dostali v treťom kroku Seifertovho algoritmu nejaké do seba vhníezené okruhy, ktoré vznikli z diagramu, potom odpovedajúce disky budú nad sebou. Všimneme si, že všetky disky spojené prúžkom na rovnakej úrovni sú opačne orientované. Disky spojené prúžkami v rôznych úrovniach nad sebou sú orientované rovnako. Každému prúžku môžeme teda priradiť orientáciu tak, že súhlasí s orientáciami oboch diskov, ktoré spája. Vzniknutá plocha je preto orientovateľná. \square

Definícia 11 (Seifertova plocha). Seifertovou plochou *rozumieme spojitú orientovateľnú plochu, ktorá vznikla aplikovaním Seifertovho algoritmu na súvislý diagram uzla (linku) K .*

Poznámka. V prípade nesúvislého diagramu linku L existuje nespojitá orientovateľná plocha taká, že L je jej hranicou. Taktiež existuje ekvivalentný link k k L taký, že nejaký jeho diagram je súvislý. Z tohto súvislého diagramu dokážeme vytvoriť spojitú Seifertovu plochu.

4.2 Krivky na Seifertovej ploche

Nech K je uzol, alebo link a D jeho diagram. Z jeho Seifertovej plochy F zostrojíme graf $\Gamma(D)$ tak, že každému disku Seifertovej plochy odpovedá uzol a každému prúžku hrana grafu $\Gamma(D)$. Tento rovinný graf nazveme Seifertovým grafom.

Označme m počet stien, na ktoré Seifertov graf rozdelil rovinu, okrem vonkajšej steny. Uvažujme m kriviek tvoriacich hranice stien grafu $\Gamma(D)$ (okrem vonkajšej steny). Na ich základe skonštruujeme m kriviek ležiacich na F . Tieto krivky označíme $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Chceme uvažovať linky tvorené dvojicami získaných kriviek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Niektoré z nich sa však môžu pretínať, preto z plochy F , zostrojíme $F \times [0,1]$ tak, že orientácia plochy F a úsečky $[0,1]$ podlieha pravidlu pravej ruky a za pôvodnú plochu F v $F \times [0,1]$ považujeme $F \times (0)$. Potom teda krivka α_i odpovedá $\alpha_i \times (0)$ a $\alpha_i^\#$ označíme krivku $\alpha_i \times (1)$ pre $i \in \{1, \dots, m\}$.

V tejto novej konštrukcii sa pre $i, j \in \{1, \dots, m\}$ krivky $\alpha_i, \alpha_j^\#$ nepretínajú. Teda každá takáto dvojica uzavretých kriviek tvorí link.

4.3 Konštrukcia Seifertovej matice

Majme sadu kriviek $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ zostrojenú z uzla K tak, ako v predchádzajúcej sekcii. Každú z nich ľubovoľne pridáme orientáciu. Orientáciu pridáme aj krivkám $\alpha_1^\#, \alpha_2^\#, \dots, \alpha_m^\#$ a to tak, že pre $i \in \{1, \dots, m\}$ majú krivky α_i a $\alpha_i^\#$ rovnakú orientáciu. Potom, keďže pre každé $i, j \in \{1, \dots, m\}$ krivky $\alpha_i, \alpha_j^\#$ spolu s ich orientáciami tvoria orientovaný link, je možné uvažovať ich krížiacie číslo $lk(\alpha_i, \alpha_j^\#)$.

Definícia 12 (Seifertova matica). Seifertovou maticou, ktorá bola vytvorená zo Seifertovej plochy uzla (linku) K nazveme štvorcovú maticu M rádu m takú, že $M = [lk(\alpha_i, \alpha_j^\#)]_{i,j=1,2,\dots,m}$.

Predchádzajúca definícia využíva Seifertovu plochu, ktorá je spojitá a teda vytvorená na základe súvislého diagramu linku (uzla). Pre nesúvislý link, môžeme získať nespojitú orientovateľnú plochu, ktorej hranicu tvorí tento link. Na jej základe dodefinujeme Seifertovu maticu tohto nesúvislého linku nasledovne:

Definícia 13. Nech L je nesúvislý link s nesúvislým diagramom D s $p \in \mathbb{N}$ súvislými komponentmi. Nech M_1, M_2, \dots, M_p sú Seifertove matice súvislých komponentov diagramu D , rádov postupne m_1, m_2, \dots, m_p . Potom definujeme Seifertovu maticu M linku L ako štvorcovú maticu rádu $m = p - 1 + \sum_{i=1}^p m_i$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & & & \\ & M_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & M_p & \\ & & & & O_{p-1} \end{pmatrix}$$

kde O_{p-1} značí štvorcovú nulovú maticu rádu $p - 1$.

4.4 S-ekvivalentné Seifertove matice

Definícia 14 (S-ekvivalentné matice). Nech M je štvorcová matica rádu m . Majme operácie

1. $\Lambda_1 : M \rightarrow PMP^T$, kde $P \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ je invertibilná matica, $\det P = \pm 1$ a P^T značí transponovanú maticu P .

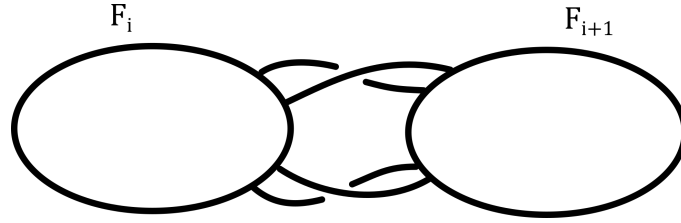
2.

$$\Lambda_2 : M \rightarrow \begin{pmatrix} & * & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ M & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ alebo } \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ M & & \\ * & \dots & * & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Potom povieme, že dve Seifertove matice M_1, M_2 sú S -ekvivalentné, pokiaľ môžeme previesť maticu M_1 na maticu M_2 aplikáciou konečnej postupnosti operácií Λ_1, Λ_2 a ich inverzných operácií $\Lambda_1^{-1}, \Lambda_2^{-1}$.

Nasledujúca veta objasňuje definíciu Seifertovej matice pre nesúvislý diagram nesúvislého linku. Takáto Seifertova matica je S -ekvivalentná Seifertovej matici, ktorá vznikne z diagramu ekvivalentného linku, v ktorom sú jednotlivé nesúvislé komponenty preložené cez seba v zmysle druhého Reidemeisterovho pohybu.

Veta 9. *Nech L je nesúvislý link a D jeho nesúvislý diagram. Nech $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_p$ je plocha, ktorej hranicu tvorí link L a M príslušná Seifertova matica. Označme \hat{F} orientovateľnú spojitú plochu, ktorá vznikla z F prepojením komponentov F_i, F_{i+1} pre $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ dvomi prúžkami, tak ako ukazuje obrázok 4.3. Nech \hat{M} je Seifertova matica vytvorená z plochy \hat{F} . Potom sú matice M a \hat{M} S -ekvivalentné. Navyše matica \hat{M} sa dá previesť na maticu M konečnou aplikáciou operácií Λ_1 .*



Obr. 4.3: Prepojenie komponentov F_i a F_{i+1} .

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v (Murasugi, 1996, kapitola 5, sekcia 4) □

Veta 10. *Seifertove matice dvoch ekvivalentných uzlov (linkov) sú S -ekvivalentné.*

Dôkaz. Dôkaz je uvedený v (Murasugi, 1996). □

4.5 Alexanderov polynóm zo Seifertovej matice

V tejto sekcii budeme uvažovať determinant matice $(M - tM^T)$, kde M je Seifertova matica uzla (linku) a $\det(M - tM^T) \in \mathbb{Z}[t]$. Nahliadneme, že aplikácia operácií Λ_1, Λ_2 a ich inverzných operácií ovplyvní $\det(M - tM^T)$ iba o násobok t^k , $k \in \mathbb{Z}$.

Keďže $\det(P) = \pm 1$:

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_1(M) - t\Lambda_1(M)^T) &= \det(PMP^T - tPM^TP^T) = \det(P(M - tM^T)P^T) = \\ &= \det(P) \det(M - tM^T) \det(P^T) = \det(M - tM^T) \end{aligned}$$

Obdobne pre Λ_1^{-1} .

Ďalej pre Λ_2 platí:

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_2(M) - t\Lambda_2(M)^T) &= t \det(M - tM^T) \\ \det(\Lambda_2^{-1}(M) - t\Lambda_2^{-1}(M)^T) &= t^{-1} \det(M - tM^T) \end{aligned}$$

Kedže Seifertove matice ekvivalentných uzlov (linkov) sú S -ekvivalentné a operácie S -ekvivalencie ovplyvnia $\det(M - tM^T)$ iba o násobok $t^k, k \in \mathbb{Z}$, môžeme po normalizovaní uvažovať tento polynóm ako uzlový (linkový) invariant. Nasledujúca veta ukazuje ako je možné polynóm normalizovať.

Veta 11. *Nech M_1 a M_2 sú Seifertove matice dvoch ekvivalentných uzlov (linkov). Nech ich rády sú postupne r a s . Potom platí:*

$$t^{-r/2} \det(M_1 - tM_1^T) = t^{-s/2} \det(M_2 - tM_2^T)$$

Dôkaz. Nech M je Seifertova matica rádu r nejakého uzla (linku). Z pozorovania predchádzajúceho dokazovanej vete vieme, že polynóm $\det(M - tM^T)$ je invariantný voči operácii Λ_1 a jej inverzu. Operácia Λ_2 zväčší rád matice M o 2 a zároveň je $\det(\Lambda_2(M) - t\Lambda_2(M)^T) = t \det(M - tM^T)$. Inverzná operácia k Λ_2 zmenší rád matice o 2 a skúmaný determinant pre túto novú maticu dostaneme ako násobok t^{-1} pôvodného determinantu $\det(M - tM^T)$. Preto je $t^{-r/2} \det(M - tM^T)$ invariant voči operáciám S -ekvivalencie. Tým je veta dokázaná. \square

Definícia 15. Alexanderov polynóm uzla (linku) K definujeme ako

$$t^{-r/2} \det(M - tM^T)$$

zo $\mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$ kde M je Seifertova matica uzla (linku) K rádu r a definujeme $(t^{1/2})^2 = t$ a $(t^{-1/2})^2 = t^{-1}$.

Z predchádzajúcej diskusie plynie, že takto definovaný Alexanderov polynóm je uzlový (linkový) invariant.

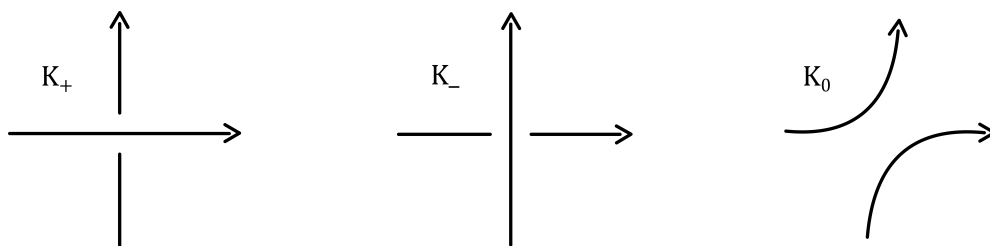
5. Conwayov polynóm a ekvivalencia postupov

V predchádzajúcich kapitolách sme predstavili tri rôzne spôsoby výpočtu Alexanderovho polynómu. V tejto kapitole uvedieme štvrtý. Jedná sa o spôsob, ktorý v roku 1969 vymyslel John Conway. V tejto kapitole vychádzame z (Murasugi, 1996, Sekcia 6.2) a (Cromwell, 2004, Kapitola 7). Ďalej v tejto kapitole ukážeme čiastočné výsledky smerujúce k dôkazu ekvivalencie postupov v kapitolách 2, 3 a 4.

5.1 Conwayov polynóm

Definícia 16 (Conwayov polynóm). *Pre orientovaný uzol, alebo link K definujeme Conwayov polynóm $\nabla_K(z)$ ako Laurentov polynóm zo $\mathbb{Z}[z, z^{-1}]$, pre ktorý platí:*

1. *Ak K je triviálny uzol, potom $\nabla_K(z) = 1$.*
2. *Nech K_+ , K_- a K_0 sú uzly (linky) a D_+ , D_- a D_0 k nim príslušné diagramy, také, že D_+ , D_- a D_0 sú rovnaké až na okolie jedného bodu kríženia a na tomto okolí bodu kríženia sa líšia spôsobom zobrazeným na obrázku 5.1.*



Obr. 5.1: Lokálna zmena v okolí bodu kríženia.

Potom pre ich Conwayove polynómy platí rovnosť

$$\nabla_{K_+}(z) = \nabla_{K_-}(z) + z\nabla_{K_0}(z).$$

Veta 12. *Conwayov polynóm je dobre definovaný a jednoznačný.*

Poznámka. Vzťah $\nabla_{K_+}(z) = \nabla_{K_-}(z) + z\nabla_{K_0}(z)$ nazývame *skeinová relácia*.

5.2 Ekvivalencia postupov výpočtu Alexanderovho polynómu

Pomocou Conwayovho polynómu je možné opäť iným spôsobom definovať Alexanderov polynóm. Alexanderov polynóm v premennej t získame dosadením $t^{1/2} - t^{-1/2}$ za premennú z Conwayovho polynómu. Niekedy ho tiež nazývame

Alexanderov-Conwayov polynóm. Ak by sa nám podarilo dokázať, že každý z Alexanderových polynómov vypočítaných pomocou postupov kapitolách 2, 3 a 4 je až na násobok $\pm t^{k/2}$, $k \in \mathbb{Z}$ rovný Alexanderovmu polynómu získanému z Conwayovho polynómu, dostali by sme želanú ekvivalenciu postupov výpočtu.

Poznámka. V kapitole 4 sme Alexanderov polynóm definovali s inou normalizáciou ako v kapitolách 2 a 3. Navyše v kapitole 4 je Alexanderov polynóm výraz zo $\mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$, zatiaľ čo v kapitolách 2 a 3 patrí $\mathbb{Z}[t]$. Chceli by sme však ukázať, že všetky tri postupy až na normalizáciu dávajú ten istý polynóm, preto povoľujeme násobenie Alexanderovho polynómu $\pm t^{k/2}$ kde $k \in \mathbb{Z}$ a Alexanderov polynóm chápeme ako invariant až na násobok $\pm t^{k/2}$.

Veta 13. Alexanderov polynóm $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ uzla (linku) K , definovaný pomocou Seifertových plôch ako v kapitole 4, získame z Conwayovho polynómu ako

$$\Delta_K(t) = \nabla_K(t^{1/2} - t^{-1/2})$$

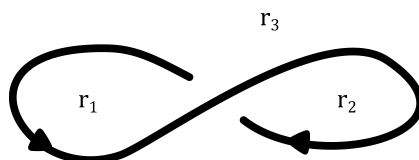
kde $\nabla_K(z)$ je Conwayov polynóm.

Dôkaz. Dôkaz je možné nájsť v (Murasugi, 1996, Sekcia 6.2). Mierne odlišný dôkaz je uvedený v (Cromwell, 2004, Kapitola 7). \square

K dôkazu, že Alexanderov polynóm získaný postupmi z kapitôl 2 a 3 je ten istý polynóm ako Alexanderov-Conwayov polynóm, je potrebné overiť axiómy z definície Conwayovho polynómu s dosadením $t^{1/2} - t^{-1/2}$ za z .

Veta 14. Alexanderov polynóm triviálneho uzla vypočítaný metódou farbenia stien diagramu uzla z kapitoly 2 je rovný 1.

Dôkaz. Bez újmy na všeobecnosti vyjdeme z diagramu triviálneho uzla ako na obrázku 5.2 a v súlade s obrázkom tiež priradíme premenné stenám diagramu.



Obr. 5.2: Diagram triviálneho uzla s jedným bodom kríženia.

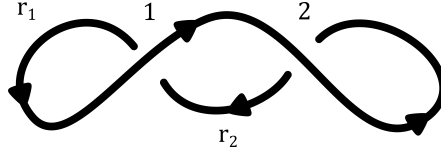
Zostavíme maticu M postupom z kapitoly 2 tak, že premennej r_i odpovedá i -ty stĺpec matice M .

$$M = \begin{pmatrix} t & 1 & (-t - 1) \end{pmatrix}$$

Odstránením prvého a tretieho stĺpca matice, dostávame maticu s determinantom rovným 1. Alexanderov polynóm triviálneho uzla je teda rovný 1. Obdobne pre opačnú orientáciu. \square

Veta 15. Alexanderov polynóm triviálneho uzla vypočítaný metódou farbenia oblúkov diagramu uzla z kapitoly 3 je rovný 1.

Dôkaz. Bez újmy na všeobecnosti vyjdeme z diagramu triviálneho uzla ako na obrázku 5.3 a v súlade s obrázkom tiež priradíme premenné oblúkom diagramu a očísľujeme body kríženia.



Obr. 5.3: Diagram triviálneho uzla s dvomi bodmi kríženia.

Zostavíme maticu M postupom z kapitoly 3 tak, že premennej r_i odpovedá i -ty stĺpec matice M .

$$M = \begin{pmatrix} 1 - t + t & 1 - t + t \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

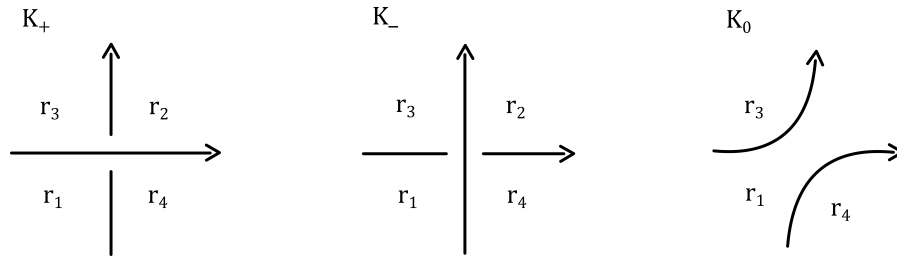
Odstránením druhého riadku a druhého stĺpca matice M , dostávame maticu s determinantom rovným 1. Alexanderov polynóm triviálneho uzla je teda rovný 1. Obdobne pre opačnú orientáciu. \square

Veta 16. *Nech $\Delta_K(t)$ je Alexanderov polynóm uzla K definovaný pomocou farbenia stien diagramu uzla ako v kapitole 2. Potom pre uzly (linky) K_+, K_- a K_0 , ktorých diagramy sa líšia iba na okolí jedného bodu kríženia spôsobom, ako na obrázku 5.1, existujú také $k_+, k_-, k_0, a, b, c \in \mathbb{Z}$, že platí*

$$(-1)^a \cdot t^{k_+/2} \Delta_{K_+}(t) = (-1)^b \cdot t^{k_-/2} \Delta_{K_-}(t) + (-1)^c \cdot t^{k_0/2} \cdot (t^{1/2} - t^{-1/2}) \Delta_{K_0}(t).$$

Dôkaz. Vďaka tomu, že Alexanderov polynóm nezávisí na zvolenom reprezentantovi typu uzla a jeho diagrame, môžeme bez újmy na všeobecnosti predpokladať, že uzly (linky) K_+, K_- a K_0 majú dostatočný počet krížení, teda sa nejedná o žiaden z okrajových prípadov definovaných inak ako hlavným algoritmom kapitoly 2. (V opačnom prípade pridáme diagramom bod kríženia prvým Reidemeisterovým pohybom.)

Pridelme stenám premenné podľa obrázku 5.4.



Obr. 5.4: Označenie stien diagramov uzlov K_+, K_- a K_0 .

1. Nech sú najskôr steny s premennými r_1 a r_2 v diagrame uzla K_+ tou istou stenou. Potom je K_0 nespojitý link a podľa poznámky zo sekcie 2.2 je jeho Alexanderov polynóm rovný nulovému polynómu. Ďalej vieme, že uzly K_1 a K_2 sú ekvivalentné, zobrazené kríženie sa dá totiž odstrániť otočným častí uzla. Potom teda $\Delta_{K_+}(t) = \Delta_{K_-}(t)$. Takže stačí zvoliť $k_+ = k_- = k_0 = a = b = c = 0$.

2. Nech sú teda steny s premennými r_1 a r_2 rôzne steny. Potom sú všetky 4 steny v diagrame uzla K_+ , taktiež ako v diagrame uzla K_- rôzne, lebo oblúk vychádzajúci z bodu kríženia sa musí po prechode ľubovoľne veľa krížienami napojiť buď na oblúk vchádzajúci do zobrazeného bodu kríženia, alebo v smere orientácie na oblúk prechádzajúci bodom kríženia. To isté platí aj pre oblúk prechádzajúci zobrazeným bodom kríženia. Týmto budú steny s premennými r_3 a r_4 vymedzené od stien r_1 a r_2 .

Nech uzly (linky) K_+ a K_- majú v bodov kríženia. Potom má uzol (link) K_0 $v - 1$ bodov kríženia. Označme matice vypočítané z uzlov K_+ , K_- a K_0 postupne M^+ , M^- a M^0 . Matice M^+ , M^- sú tvaru $v \times (v+2)$. Matica M^0 je tvaru $(v-1) \times (v+1)$. Preusporiadajme stĺpce matíc M^+ a M^- tak, aby pre prvé štyri stĺpce platilo, že i -ty stĺpec odpovedá stene s premennou r_i . Nech platí to isté pre prvé tri stĺpce matice M^0 . Ďalej nech prvý riadok matíc M^+ a M^- odpovedá bodu kríženia zobrazenému na obrázku 5.4. Nech sú stĺpce ostatných oblúkov a riadky ostatných bodov kríženia zoradené vo všetkých troch maticiach rovnako.

Potom

$$M^+ = \begin{pmatrix} -t & -1 & t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & A & & & \end{pmatrix}$$

$$M^- = \begin{pmatrix} 1 & t & -t & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & A & & & \end{pmatrix}$$

$$M^0 = (a_1 + a_2 | A_{1,2})$$

Kde A je blok tvaru $(v-1) \times (v+2)$, $A_{1,2}$ značí maticu A s vynechaným prvým a druhým stĺpcom, a_1 je prvý stĺpec matice A , a_2 je druhý stĺpec matice A a $+$ značí sčítanie po zložkách.

Odstráňme teraz z matíc M^+ a M^- 1. a 3. stĺpec a z matice M^0 1. a 2. stĺpec. Poznamenáme, že steny odpovedajúce týmto stĺpcom sú v príslušných diagramoch susedné, takže postupujeme podľa algoritmu z kapitoly 2. Označme výsledné matice postupne $M_{1,3}^+$, $M_{1,3}^-$ a $M_{1,2}^0$. Označme Y maticu, ktorá vznikne z matice $M_{1,3}^+$ odstránením prvého riadku a druhého stĺpca. Urobíme rozvoj matíc $M_{1,3}^+$ a $M_{1,3}^-$ podľa prvého riadku.

$$\det M_{1,3}^+ = (-1) \cdot (-1)^2 \cdot \det M_{1,2}^0 + (-1)^3 \cdot \det Y = -\det M_{1,2}^0 - \det Y$$

$$\det M_{1,3}^- = t \cdot (-1)^2 \cdot \det M_{1,2}^0 + (-1) \cdot (-1)^3 \cdot \det Y = t \cdot \det M_{1,2}^0 + \det Y$$

Potom teda máme

$$\det M_{1,3}^+ = (-1) \cdot \det M_{1,3}^- + t^{1/2} \cdot (t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot \det M_{1,2}^0$$

Kde $\det M_{1,3}^+$, $\det M_{1,3}^-$ a $\det M_{1,2}^0$ sú nejaké $\pm t^{k/2}$, $k \in \mathbb{Z}$ násobky Alexandrových polynómov uzlov (linkov) K_+ , K_- a K_0 . Tým je veta dokázaná.

□

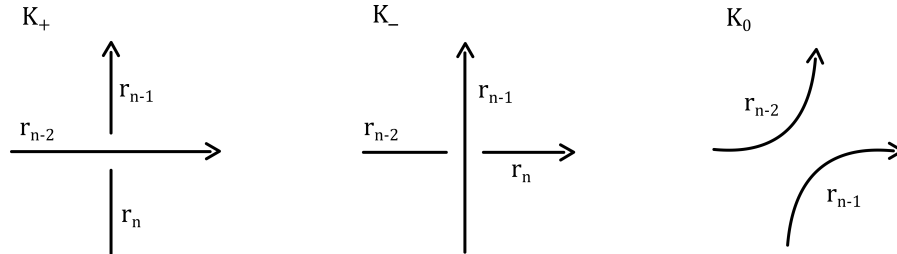
Veta 17. *Nech $\Delta_K(t)$ je Alexanderov polynóm uzla K definovaný pomocou farbenia oblúkov diagramu uzla ako v kapitole 3. Potom pre uzly (linky) K_+, K_- a K_0 , ktorých diagramy sa líšia iba na okolí jedného bodu kríženia spôsobom, ako na obrázku 5.1, existujú také $k_+, k_-, k_0, a, b, c \in \mathbb{Z}$, že platí*

$$(-1)^a \cdot t^{k_+/2} \Delta_{K_+}(t) = (-1)^b \cdot t^{k_-/2} \Delta_{K_-}(t) + (-1)^c \cdot t^{k_0/2} \cdot (t^{1/2} - t^{-1/2}) \Delta_{K_0}(t).$$

Dôkaz. Vďaka tomu, že Alexanderov polynóm nezávisí na zvolenom reprezentantovi typu uzla a jeho diagrame, môžeme bez újmy na všeobecnosti predpokladať, že uzly (linky) K_+, K_- a K_0 majú dostatočný počet krížení, teda sa nejedná o žiaden z okrajových prípadov definovaných inak ako hlavným algoritmom kapitoly 3. (V opačnom prípade pridáme diagramom bod kríženia prvým Reidemeisterovým pohybom.)

Priradíme oblúkom premenné tak, ako na obrázku 5.5, kde $n \in \mathbb{N}$ je počet oblúkov uzla (linku) K_+ .

1. Nech sú najskôr oblúky uzla K_+ s premennými r_{n-1} a r_{n-2} tým istým oblúkom. Potom sú aj oblúky r_{n-1} a r_{n-2} uzla K_- , tým istým oblúkom. Ďalej sú uzly K_+ a K_- ekvivalenté, lebo otočením časti uzlu nachádzajúcej sa od zobrazeného bodu kríženia vľavo hore môžeme previesť uzol K_+ na uzol K_- . Teda $\Delta_{K_+}(t) = \Delta_{K_-}(t)$. Zároveň je K_0 nesúvislý link s nesúvislým diagramom, ktorého Alexanderov polynóm je podľa vety 5 nulový polynóm. Teda voľba $k_+ = k_- = k_0 = a = b = c = 0$ splňuje danú rovnosť. Rovnaká argumentácia funguje v prípade, že oblúky r_n a r_{n-2} v uzle K_+ a teda oblúky r_n, r_{n-1} v uzle K_- sú tým istým oblúkom.



Obr. 5.5: Označenie oblúkov diagramov uzlov K_+, K_- a K_0 .

2. Nech potom v diagrame uzla K_+ sú oblúky s premennými r_{n-1}, r_{n-2} a oblúky s premennými r_{n-2}, r_n v dvojiciach rôzne oblúky. Potom sú nutne všetky tri oblúky uzla K_+ zobrazené na obrázku rôzne. Taktiež pre oblúky diagramu uzla K_- a oblúky diagramu uzla K_0 .

Zostavme teraz z diagramov uzlov (linkov) K_+, K_-, K_0 postupom z kapitoly 3 matice M^+, M^- a M^0 . Stĺpce a riadky matíc, zoradíme tak, že oblúku s premennou r_i odpovedá i -ty stĺpec matice pre všetky oblúky zobrazené na obrázku 5.5 a posledný (n -tý) riadok matíc M^+ a M^- odpovedá zobrazenému bodu kríženia. Riadky ostatných bodov kríženia a stĺpce ostatných oblúkov zoradíme ľubovoľne, no rovnako vo všetkých troch maticiach. Označme pre $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $a_{i,j}(+)$, $a_{i,j}(-)$ a $a_{i,j}(0)$ prvky v i -tom riadku a j -tom stĺpci matíc M^+, M^- a M^0 . Pre každú maticu M budeme v tomto

dôkaze značiť $M_{i,j}$ maticu, ktorá vznikne z M odstránením i -teho riadku a j -teho stĺpca. Potom dostávame nasledujúce vzťahy:

(a) Pre $j \neq n-2, n-1, n$ a $i \neq n$

$$a_{i,j}(0) = a_{i,j}(+) = a_{i,j}(-)$$

(b) Pre $i \neq n$

$$a_{i,n-2}(+) = a_{i,n-2}(-) + a_{i,n}(-)$$

$$a_{i,n-1}(+) = a_{i,n-1}(-) - a_{i,n}(+)$$

(c)

$$a_{i,n-2}(0) = a_{i,n-2}(-) + a_{i,n-1}(+)$$

$$a_{i,n-1}(0) = a_{i,n}(+) + a_{i,n}(-)$$

(d)

$$a_{n,n-2}(+) = 1 - t$$

$$a_{n,n-1}(+) = t$$

$$a_{n,n}(+) = -1$$

$$a_{n,n-2}(-) = t$$

$$a_{n,n-1}(-) = 1 - t$$

$$a_{n,n}(-) = -1$$

(e) Pre $j \neq n-2, n-1, n$

$$a_{n,j}(+) = a_{n,j}(-) = 0$$

Ďalej odstráňme zo všetkých matíc riadok $n-1$, z matíc M^+ a M^- stĺpec $n-1$ a z matice M^0 stĺpec $n-2$. Ďalej v takto získanej matici $M_{n-1,n-1}^-$ pripočítajme stĺpec $n-1$ (odpovedá stĺpcu n matice M^-) k stĺpcu $n-2$. Poznamenáme, že táto operácia nemení determinant matice. Označme takto získané matice W^+ , W^- a W^0 . Rozvojom podľa posledného riadka:

$$\det W^+ = (-1)^{2n-3} \cdot (1-t) \cdot \det W_{n-1,n-2}^+ + (-1) \cdot (-1)^{2n-2} \cdot \det W_{n-1,n-1}^+$$

$$\det W^- = (-1)^{2n-3} \cdot (t-1) \cdot \det W_{n-1,n-2}^- + (-1) \cdot (-1)^{2n-2} \cdot \det W_{n-1,n-1}^-$$

Ďalej si uvedomíme, že z bodu (c) plynie

$$\det W^0 = \det W_{n-1,n-2}^+ + \det W_{n-1,n-2}^-$$

a z bodov (a) a (b) plynie

$$\det W_{n-1,n-1}^+ = \det W_{n-1,n-1}^-$$

Spolu dostávame

$$\det W^+ = \det W^- + t^{1/2} \cdot (t^{1/2} - t^{-1/2}) \cdot \det W^0$$

Kde $\det W^+$, $\det W^-$ a $\det W^0$ sú nejaké $\pm t^{k/2}$, $k \in \mathbb{Z}$ násobky Alexandrových polynómov uzlov (linkov) K_+ , K_- a K_0 . Tým je veta dokázaná.

□

Podarilo sa nám dokázať, že skeinová relácia vždy platí pre nejaký tvar Alexanderovho polynómu. Pre dôkaz ekvivalencie postupov by sme však potrebovali dostať, že skeinové relácie, v ktorých figuruje Alexanderov polynóm uzla K , vždy využívajú ten istý tvar jeho Alexanderovho polynómu. Avšak vyriešiť tento problém sa ukazuje byť obtiažne, keďže v oboch postupoch farbenia je tvar Alexanderovho polynómu, ktorý dostaneme ako determinant príslušnej matice, závislý na voľbe vynechaných stĺpcov (prípadne stĺpca a riadku). Preto sa nám nepodarilo v dôkazoch Alexanderov polynóm vhodne normalizovať v priebehu výpočtu a ukázať, že do skeinovej relácie vždy vstupuje jeho rovnako normalizovaný tvar.

Záver

V práci sme podrobne popísali štyri rôzne spôsoby výpočtu Alexanderovho polynómu. Doplnili sme podrobnosti, okomentovali postupy pre lepšiu zrozumiteľnosť, ošetrili špeciálne prípady a rozšírili niektoré dôkazy.

Pôvodným cieľom práce bolo okrem popisu týchto algoritmov taktiež pokúsiť sa ukázať, že všetky postupy dávajú ako výsledok ten istý polynóm — Alexanderov polynóm. V poslednej kapitole sme sa snažili prepojiť všetky postupy pomocou Conwayovho polynómu. Dospeli sme k čiastočným výsledkom.

K úplnému dôkazu ekvivalencie postupov by sme potrebovali ukázať, že pre Alexanderove polynómy vypočítané postupmi z kapitôl 2, 3 a 4 platí, že až na násobok $\pm t^{k/2}$ sa jedná o Alexanderov polynóm vypočítaný z Conwayovho polynómu. Bolo by teda potrebné overiť, či axiómy z definície Conwayovho polynómu s dosadením za premennú $z = t^{1/2} - t^{-1/2}$ platia pre nejakú normalizáciu Alexanderovho polynómu z ostatných postupov.

Pre postupy farbenia stien a oblúkov diagramu uzla sa nám podarilo ukázať, že Alexanderov polynóm triviálneho uzla je rovný 1. Ďalej sme dokázali, že existujú také tvary (také $\pm t^{k/2}$ násobky, $k \in \mathbb{Z}$) Alexanderových polynómov uzlov K_+ , K_- a K_0 , pre ktoré skeinová relácia platí. Pre úplný dôkaz ekvivalencie by sme však potrebovali dostať, že skeinová relácia vždy platí pre jeden konkrétny tvar Alexanderovho polynómu uzla. Inak povedané, že keď sa Alexanderov polynóm uzla K objaví v dvoch rôznych rovniciach daných skeinovými reláciami, ktoré napríklad popisujú vzťahy Alexanderových polynómov uzlov, ktorých diagramy sa líšia na okolí iného bodu kríženia, potom skeinová relácia v oboch prípadoch operuje s rovnakým tvarom Alexanderovho polynómu uzla K . Problémom je, že v obidvoch spôsoboch výpočtu Alexanderovho polynómu pomocou farbení, nevieme v priebehu výpočtu určiť, aký tvar Alexanderovho polynómu dostaneme ako determinant príslušnej matice. Preto je ťažké v týchto prípadoch obecné tento polynóm normalizovať na tvar, ktorým používa skeinová relácia. Naopak v postupe výpočtu Alexanderovho polynómu pomocou Seifertových plôch je tvar Alexanderovho polynómu, jednoznačne určený rádom matice, z ktorej tento polynóm počítame. Preto ho dokážeme v priebehu výpočtu normalizovať na tvar, ktorý bude rovný Conwayovmu polynómu s dosadením $z = t^{1/2} - t^{-1/2}$ a toto je využité v dôkaze ekvivalencie tohto postupu s výpočtom pomocou Conwayovho polynómu.

Prínosom tejto práce je podrobný popis štyroch rôznych algoritmov výpočtu Alexanderovho polynómu, doplnenie a rozšírenie dôkazov, taktiež aj dôkazy, ktoré by mohli smerovať k ukázaniu ekvivalencie postupov.

Zoznam použitej literatúry

- ADAMS, C. C. (2004). *The knot book : an elementary introduction to the mathematical theory of knots*. reprint with corrections. American Mathematical Society, Providence, R.I. ISBN 0-8218-3678-1.
- ALEXANDER, J. W. (1928). Topological invariants of knots and links. *Transaction of the American Mathematical Society*, **30**, 275–306.
- COLLINS, J. (2007). The Alexander polynomial: the woefully overlooked granddaddy of knot polynomials. <http://infohost.nmt.edu/~starrett/Fall2014/TopologyOfChaos/KnotTheory/GeomClub.pdf>.
- CROMWELL, P. R. (2004). *Knots and links*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-54831-4.
- LONG, E. (2005). Topological invariants of knots: three routes to the Alexander polynomial. <https://www.ucl.ac.uk/~ucbpeal/alexandermac.pdf>.
- LOPEZ, R. The Alexander polynomial, coloring, and determinants of knots. <http://educ.jmu.edu/~taalmala/OJUPKT/lopez.pdf>.
- MAY, J. (2006). Matrix representations of knot and link groups. <https://www.math.hmc.edu/seniorthesis/archives/2006/jmay/jmay-2006-thesis.pdf>.
- MESSER, R. a STRAFFIN, P. (2006). *Topology now!* Classroom Resource Materials Series. Mathematical Association of America, Washington, DC. ISBN 0-88385-744-8.
- MURASUGI, K. (1996). *Knot theory & its applications*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA. ISBN 0-8176-3817-2. Translated from the 1993 Japanese original by Bohdan Kurpita.

Zoznam obrázkov

1.1	Príklady uzlov.	3
1.2	Zakázané prípady diagramov uzlov.	4
1.3	Ľavé kríženie (vľavo), pravé kríženie (vpravo).	4
1.4	Súvislé a nesúvislé diagramy linkov.	5
1.5	Reidemeisterove pohyby.	6
2.1	Označenie stien pre ľavé a pravé kríženie.	7
2.2	Indexovanie stien pre ľavé a pravé kríženie.	9
3.1	Označenie oblúkov pre ľavé a pravé kríženie.	12
3.2	Transformácia prvým Reidemeisterovým pohybom.	14
3.3	Transformácia druhým Reidemeisterovým pohybom.	15
3.4	Transformácia tretím Reidemeisterovým pohybom.	17
4.1	Odstránenie kríženia.	18
4.2	Konštrukcia prúžkov.	19
4.3	Prepojenie komponentov F_i a F_{i+1}	21
5.1	Lokálna zmena v okolí bodu kríženia.	23
5.2	Diagram triviálneho uzla s jedným bodom kríženia.	24
5.3	Diagram triviálneho uzla s dvomi bodmi kríženia.	25
5.4	Označenie stien diagramov uzlov K_+ , K_- a K_0	25
5.5	Označenie oblúkov diagramov uzlov K_+ , K_- a K_0	27